

# سیستم های مخابراتی

## فصل سوم: طیف سیگنال (تبدیل فوریه) و انتقال و فیلتر

سید مهدی سجادیه



# تبدیل فوریه

- $f$ : فرکانس موج

- $\omega$ : فرکانس زاویه ای

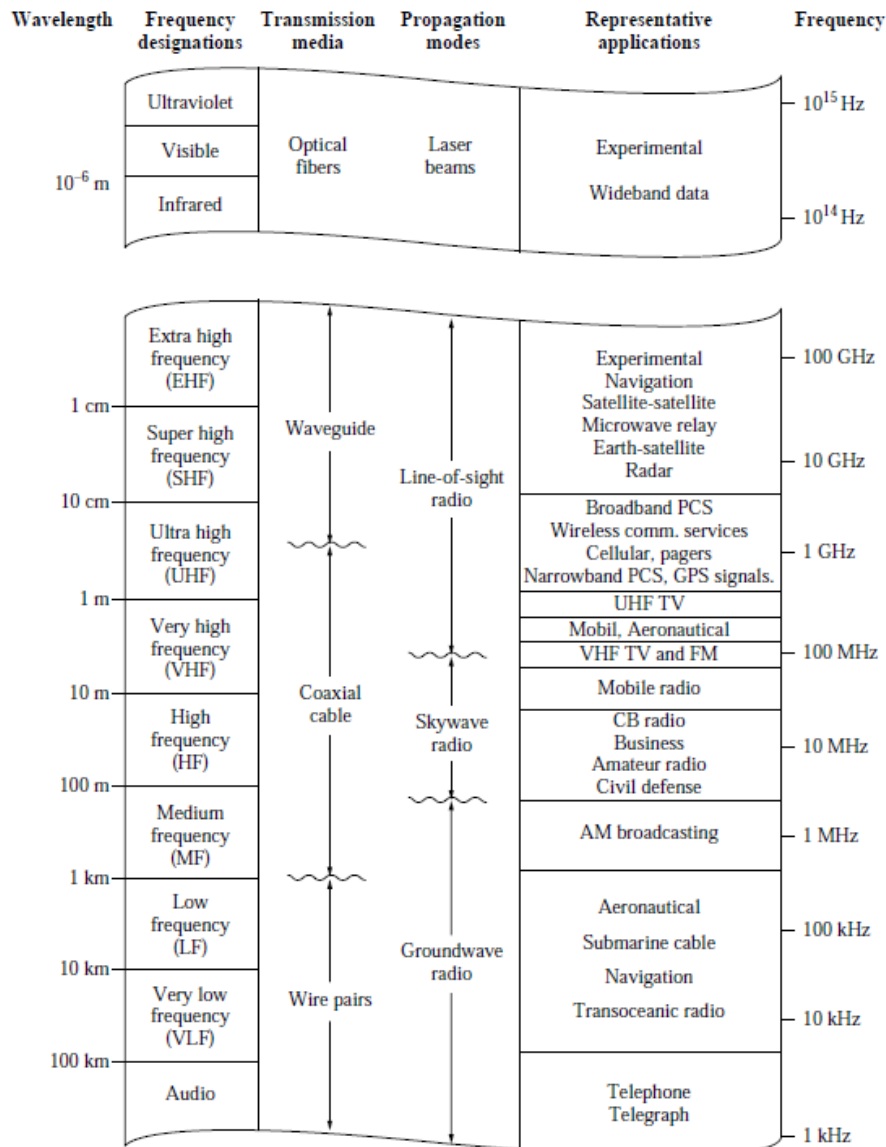
$$\omega = 2\pi f$$

- دسته بندی سیگنال‌های مورد استفاده در درس:

- توان (سیگنال‌های متناوب) **سری فوریه**

- انرژی (سیگنال‌های محدود) **تبدیل فوریه**

# گستره فرکانسی



# سری فوریه

- فرض کنید  $v(t)$  یک سیگنال توان (متناوب) با دوره تناوب  $T_0$  ( $f_0=1/T_0$ ) باشد در این صورت سری فوریه آن به صورت زیر است:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

که ضرایب سری فوریه برابر است با:

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

مقدار dc یک سیگنال متناوب

$$c(0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) dt = \langle v(t) \rangle$$

اگر سیگنال حقیقی باشد:

$$c_{-n} = c_n^* = |c_n| e^{-j \arg c_n}$$

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

توان سیگنال

# تبدیل فوریه (سیگنال های انرژی)

Definition (Fourier Transform)

$$X(f) = \int x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

$$x(t) = \int X(f) \exp(j2\pi ft) df$$

$x(at) \rightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$  Time-frequency reciprocity

$x(t - t_0) \rightarrow \exp(-j2\pi t_0 f) X(f)$  Time shift does not frequency band

It is **MULTIPLYING BY SINUSOIDS** that changes the frequency band

$$x(t) \exp(j2\pi f_c t) \rightarrow X(f - f_c)$$

$$x(t) \cos(2\pi f_c t) \rightarrow \frac{1}{2}(X(f - f_c) + X(f + f_c))$$

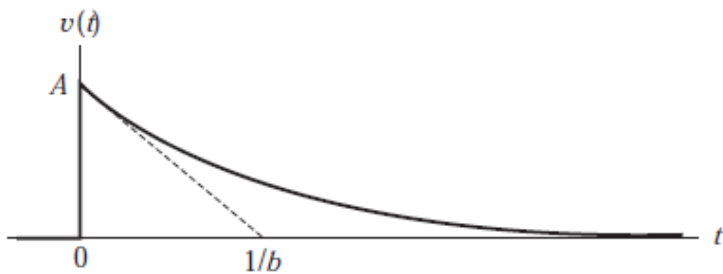
$$x(t) \sin(2\pi f_c t) \rightarrow \frac{1}{2j}(X(f - f_c) - X(f + f_c))$$

# مثال

- تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید.

$$v(t) = \begin{cases} Ae^{-bt} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

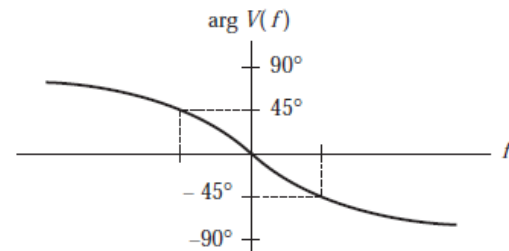
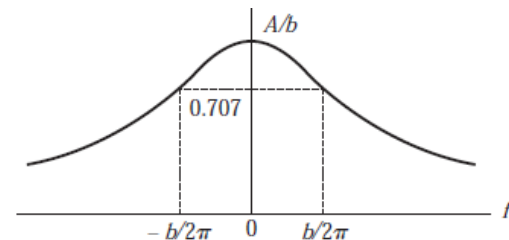
$$V(f) = \frac{A}{b + j2\pi f} = \frac{b - j2\pi f}{b^2 + (2\pi f)^2} A$$



- حل

$$V_e(f) = \text{Re}[V(f)] = \frac{bA}{b^2 + (2\pi f)^2}$$

$$V_o(f) = \text{Im}[V(f)] = -\frac{2\pi fA}{b^2 + (2\pi f)^2}$$



# ویژگی های تبدیل فوریه

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} V(f) V^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df$$

• قضیه پارسوال و رایلی

$$G_V(f) = |V(f)|^2 \quad (\text{چگالی طیف})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t) w^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} V(f) W^*(f) df$$

• دوگانی

$$V(f) = \mathcal{F}[v(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$z(t) = V(t)$$



$$\mathcal{F}[z(t)] = v(-f)$$

• مدولاسیون

$$v(t) \cos(\omega_c t + \phi) \leftrightarrow \frac{e^{j\phi}}{2} V(f - f_c) + \frac{e^{-j\phi}}{2} V(f + f_c)$$

# ویژگی های تبدیل فوریه

- انتگرال

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \rightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} \quad (\text{if } X(0) = 0)$$

- مشتق

$$\frac{d}{dt} v(t) \leftrightarrow j2\pi f V(f)$$

- و تعمیم

$$\frac{d^n}{dt^n} v(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n V(f)$$

- دوگان مشتق

$$t^n v(t) \leftrightarrow \frac{1}{(-j2\pi)^n} \frac{d^n}{df^n} V(f)$$



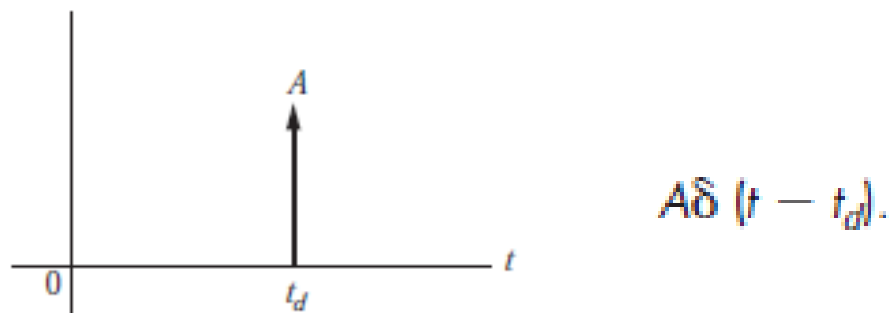
# ویژگیهای تبدیل فوریه

- کانولوشن و دوگان

$$v(t) * w(t) \leftrightarrow V(f)W(f)$$

$$v(t)w(t) \leftrightarrow V(f) * W(f)$$

- سیگنال ضربه با دامنه و شیفت زمانی



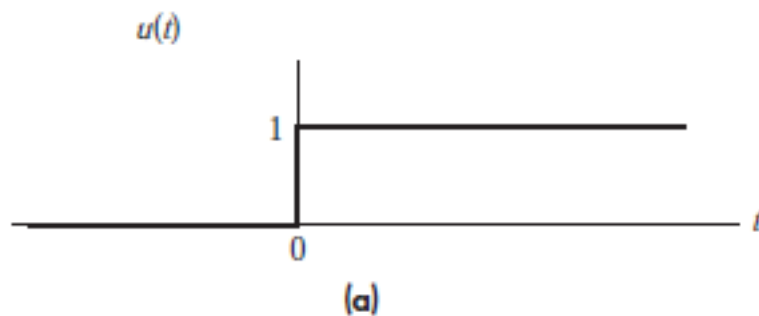
- سه ویژگی مهم سیگنال ضربه

$$v(t) * \delta(t - t_d) = v(t - t_d)$$

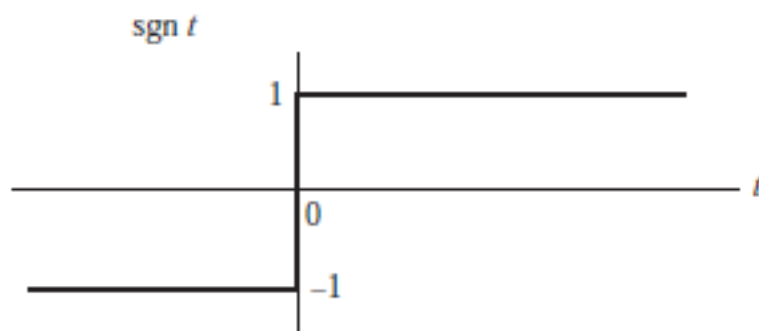
$$v(t) \delta(t - t_d) = v(t_d) \delta(t - t_d)$$

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(t) \quad \alpha \neq 0$$

# سیگنال پله و علامت



$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1 \quad \bullet$$



$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

- نکته مهم: دقت کنید اگر در سیگنالی پرش در نقطه  $t_0$  به اندازه  $A$  وجود داشته باشد در مشتق آن به اندازه مقدار پرش تابع  $A\delta(t - t_0)$  وجود می آید

# چند تبدیل فوریه مهم

$$A \delta(t) \leftrightarrow A$$

$$Ae^{j\omega t} \leftrightarrow A \delta(f - f_c)$$

$$A \cos(\omega_c t + \phi) \leftrightarrow \frac{Ae^{j\phi}}{2} \delta(f - f_c) + \frac{Ae^{-j\phi}}{2} \delta(f + f_c)$$

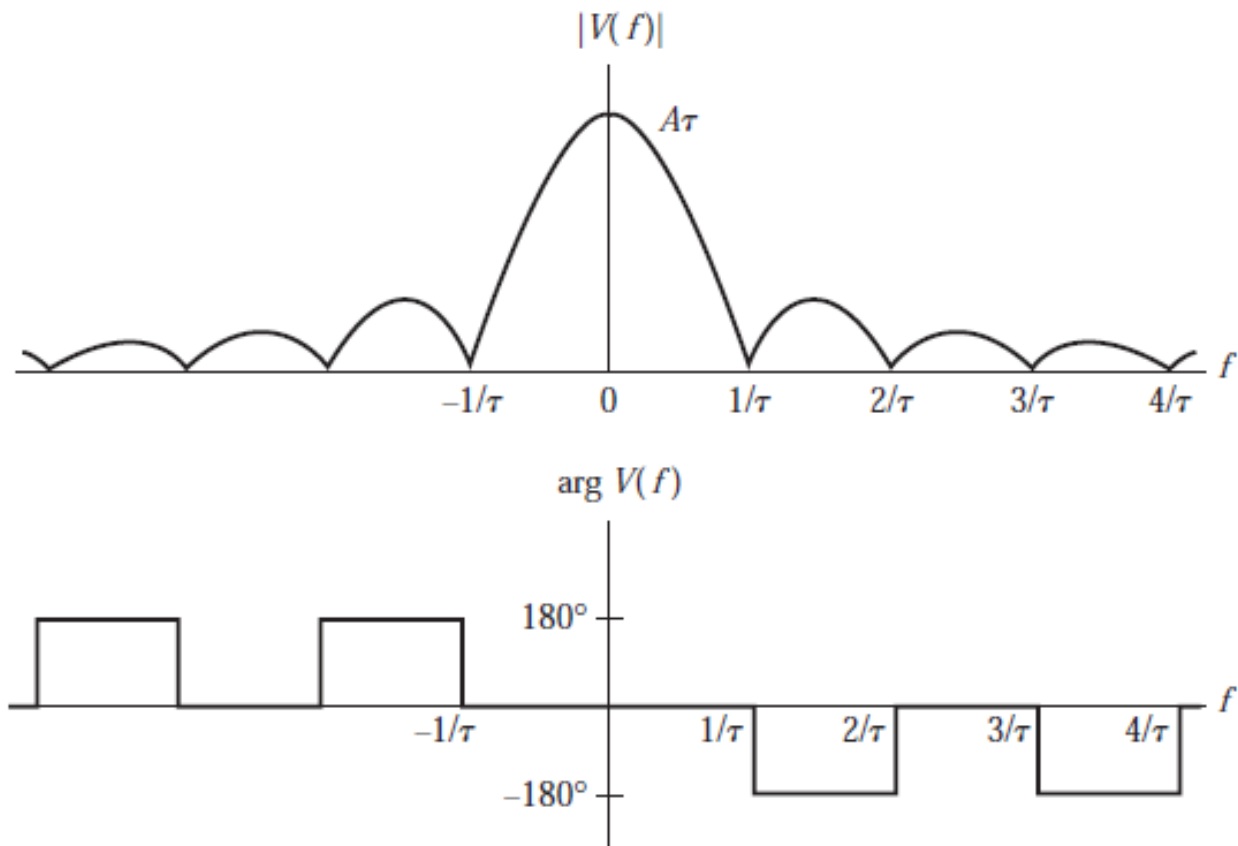
$$\frac{A}{\tau} \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow A \operatorname{sinc} f\tau$$

$$\Pi(t/\tau) \triangleq \begin{cases} 1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

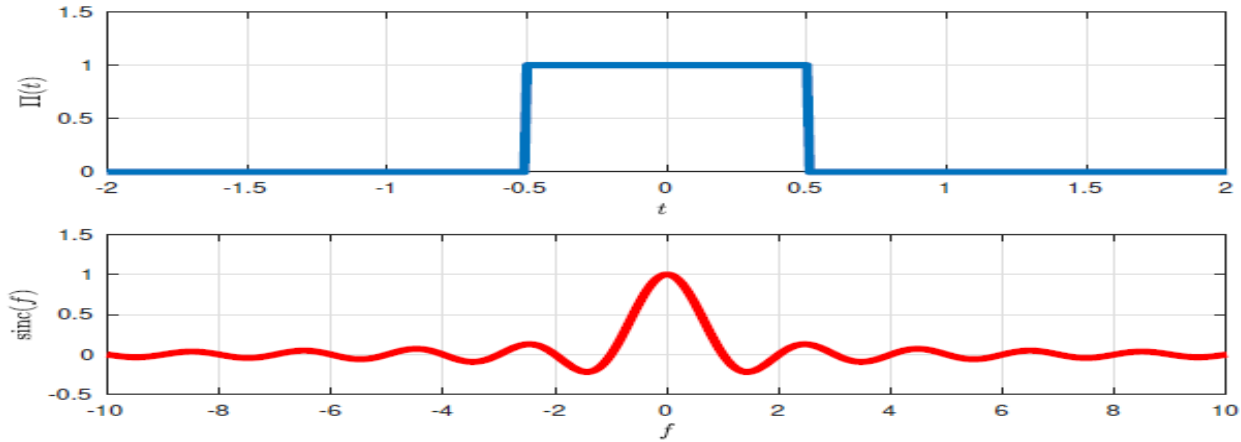
$$v(t) = A\Pi(t/\tau)$$

$$\begin{aligned} V(f) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{\pi f} \sin \pi f\tau \\ &= A\tau \operatorname{sinc} f\tau \end{aligned}$$

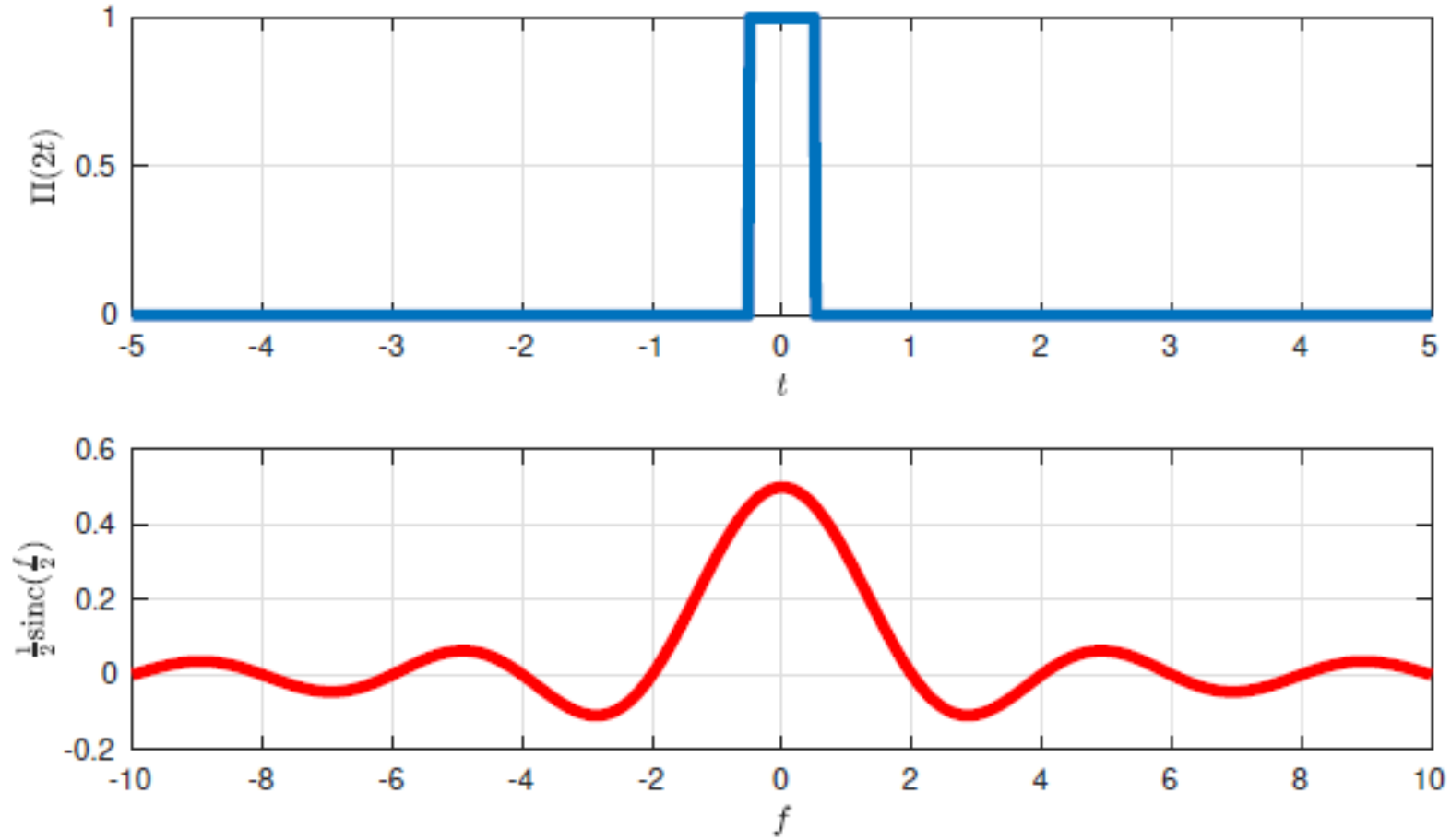
# اندازه و زاویه تبدیل فوریه rect



# مثال



# ادامه مثال



# سایر ویژگیهای تبدیل فوریه

$$V(f) = V_e(f) + jV_o(f)$$

$$\text{Re} [V(f)] = V_e(f) \quad \text{Im} [V(f)] = V_o(f)$$

$$V_e(f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \cos 2\pi ft dt$$

$$V_o(f) \triangleq - \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \sin 2\pi ft dt$$

- اگر سیگنال زوج باشد

$$V(f) = V_e(f) = 2 \int_0^{\infty} v(t) \cos \omega t dt$$

- اگر سیگنال فرد باشد

$$V(f) = jV_o(f) = -j2 \int_0^{\infty} v(t) \sin \omega t dt$$

- اگر سیگنال حقیقی باشد  $V(f) = V^*(-f)$  و در این صورت اندازه دارای تقارن نسبت محور عمودی دارد و زاویه نسبت به مبدا مختصات متقارن است

# روابط ریاضی نسبتاً مهم در اعداد مختلط

- در ادامه اگر سیستم یا سیگنالی حقیقی بود تنها قسمت مثبت تبدیل فوریه آن رسم می شود

$$\begin{aligned} e^{j2\theta_1} \pm e^{j2\theta_2} &= [e^{j(\theta_1-\theta_2)} \pm e^{-j(\theta_1-\theta_2)}] e^{j(\theta_1+\theta_2)} \\ &= \begin{cases} 2 \cos(\theta_1 - \theta_2) e^{j(\theta_1+\theta_2)} \\ j2 \sin(\theta_1 - \theta_2) e^{j(\theta_1+\theta_2)} \end{cases} \end{aligned}$$



# مثال

- تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید

$$z(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \cos \omega_c t$$

• حل

- با توجه به رابطه مدولاسیون  $v(t) \cos(\omega_c t + \phi) \leftrightarrow \frac{e^{j\phi}}{2} V(f - f_c) + \frac{e^{-j\phi}}{2} V(f + f_c)$  و تغییر مقیاس  $x(at) \rightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$  داریم:

$$Z(f) = \frac{A\tau}{2} \text{sinc}((f - f_c)\tau) + \frac{A\tau}{2} \text{sinc}(f + f_c)\tau$$

# تبدیل فوریه سیگنالهای متناوب

- فرض کنید  $v(t)$  یک سیگنال متناوب باشد:

$$\begin{aligned}v(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \right] e^{j2\pi n f_0 t}\end{aligned}$$

- سری فوریه سیگنال های مرتبط

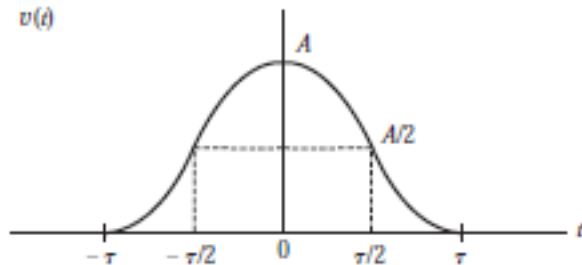
$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t} \quad \Rightarrow \quad V(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0) \delta(f - nf_0)$$

$$G_V(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0) \delta(f - nf_0)$$

# مثال

- تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید.

$$v(t) = \frac{A}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi t}{\tau} \right) \Pi \left( \frac{t}{2\tau} \right)$$



- حل ابتکاری: شکل سیگنال

- مشتق سیگنال و شکل آن

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\left(\frac{\pi}{\tau}\right) \frac{A}{2} \sin \frac{\pi t}{\tau} \Pi \left( \frac{t}{2\tau} \right)$$

- مشتق سوم سیگنال

$$\frac{d^3 v(t)}{dt^3} = \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^3 \frac{A}{2} \sin \frac{\pi t}{\tau} \Pi \left( \frac{t}{2\tau} \right) + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \frac{A}{2} \delta(t + \tau) - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \frac{A}{2} \delta(t - \tau)$$

## ادامه حل مثال

$$\frac{d^3}{dt^3} v(t) = \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^3 \frac{A}{2} \sin \frac{\pi t}{\tau} \Pi\left(\frac{t}{2\tau}\right) + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \frac{A}{2} \delta(t + \tau) - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \frac{A}{2} \delta(t - \tau)$$

- با توجه به اینکه قسمت اول برابر ضریب مشتق  $v(t)$  است برای تبدیل فوریه داریم:

$$(j2\pi f)^3 V(f) = -\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 (j2\pi f) V(f) + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \frac{A}{2} (e^{j2\pi f\tau} - e^{-j2\pi f\tau})$$

- در این صورت

$$V(f) = \frac{jA \sin 2\pi f\tau}{j2\pi f + (\tau/\pi)^2 (j2\pi f)^3} = \frac{A\tau \operatorname{sinc} 2f\tau}{1 - (2f\tau)^2}$$

- اگر  $\tilde{x}(t)$  یک سیگنال متناوب با دوره تناوب  $T_0$  باشد و

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & -\frac{T_0}{2} \leq t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- در این صورت ضرایب فوریه  $\tilde{x}(t)$  با استفاده از ضرایب سری فوریه  $X(f)$  به صورت زیر محاسبه می شود:

$$c(nf_0) = \frac{1}{T_0} X(nf_0), \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

# مثال

• فرض کنید

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq t < \frac{5}{2} \end{cases}, \quad \tilde{x}(t) = \tilde{x}(t+3)$$

• در این صورت

$$x(t) = \Pi(t) \xrightarrow{F} X(f) = \text{sinc}(f),$$

و چون  $T=3$  در این صورت

$$c(nf_0) = \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{n}{3}\right), \quad f_0 = \frac{1}{3}$$

# انتقال سیگنال و فیلتر کردن

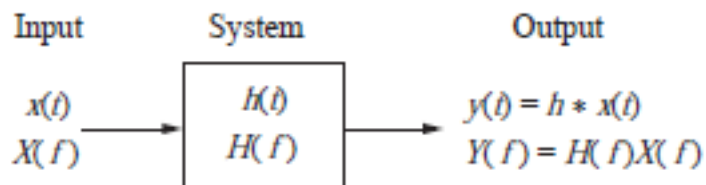
- **انتقال:** فرآیند جابه جایی سیگنال از نقطه ای به نقطه دیگر
- **فیلتر کردن:** تغییر مولفه های فرکانسی سیگنال بر اثر عبور از یک سیستم یا کانال

نکته : فیلتر کردن تنها برای کانال یا سیستم های LTI معنی دارد.

- اثرات مخرب کانال روی سیگنال
  - **اعوجاج:** تغییر شکل موج که ناشی از تاثیر پاسخ فرکانسی است.
  - **تداخل:** اثر سیگنال های مشابه با سیگنال اصلی است که موجب خراب شده سیگنال به طور ناخواسته می شود.
  - **نویز:** سیگنال های تصادفی ناخواسته که باعث خراب شدن سیگنال اصلی می شود.
- اگر  $x(t)$  ورودی یک کانال و  $y(t)$  خروجی یک کانال (سیستم) باشد در صورتی که  $y(t) = kx(t - t_d)$  گوئیم سیگنال دارای اعوجاج نیست.

# سیستم های LTI

- فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم LTI برابر  $h(t)$  باشد:



- در این صورت

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \Rightarrow G_Y(f) = |H(f)|^2 G_X(f)$$

- اگر سیستم بدون اعوجاج باشد ( $y(t) = kx(t - t_d)$ )

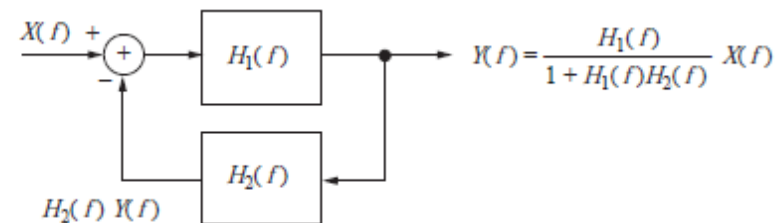
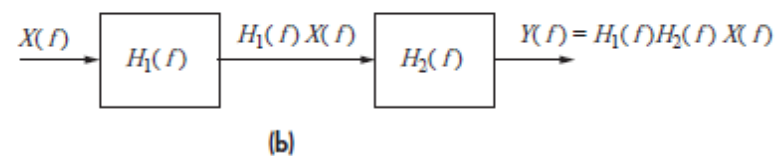
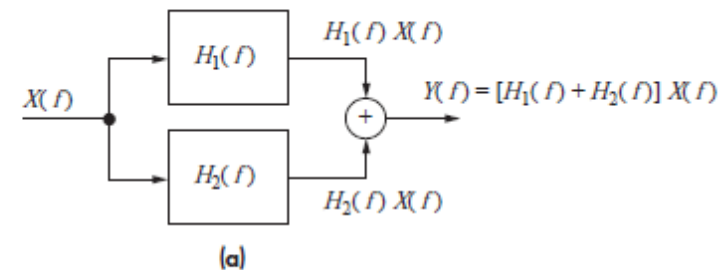
$$H(f) = \frac{ke^{-j2\pi f t_d} X(f)}{X(f)} = ke^{-j2\pi f t_d}$$



# چند سیستم مهم

Table 3.1-1

Time-Domain Operation		Transfer Function
Scalar multiplication	$y(t) = \pm Kx(t)$	$H(f) = \pm K$
Differentiation	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$H(f) = j2\pi f$
Integration	$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda$	$H(f) = \frac{1}{j2\pi f}$
Time delay	$y(t) = x(t - t_d)$	$H(f) = e^{-j2\pi ft_d}$



# اعوجاج در سیستم های LTI

- اعوجاج خطی

- اعوجاج دامنه ( $|H(f)| \neq k$ )

- اعوجاج فاز

$$\angle H(f) \neq j2\pi f t_d \pm m\pi$$

- اعوجاج غیر خطی

- رابطه غیر خطی بین ورودی و خروجی

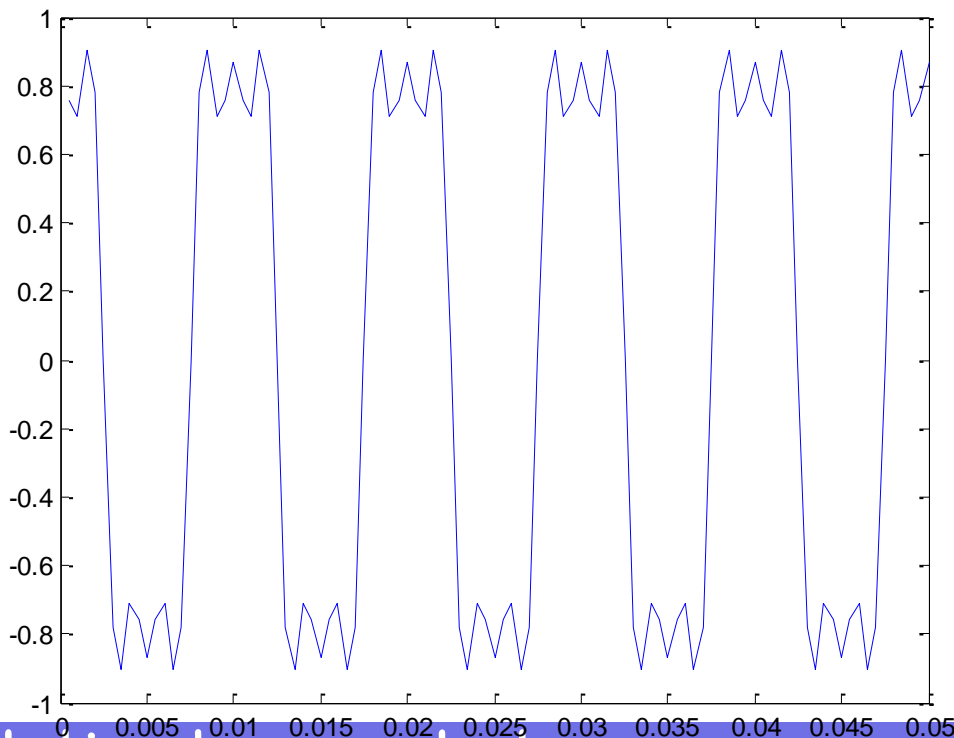
- مانند  $y(t) = x^2(t)$

# مثال (بررسی تغییر اندازه و فاز $H(f)$ )

• فرض کنید

$$x(t) = \cos(2\pi * 100 * t) - \frac{1}{3} \cos(2\pi * 300 * t) + \frac{1}{5} \cos(2\pi * 500 * t)$$

در این صورت  $x(t)$  را رسم کنید.

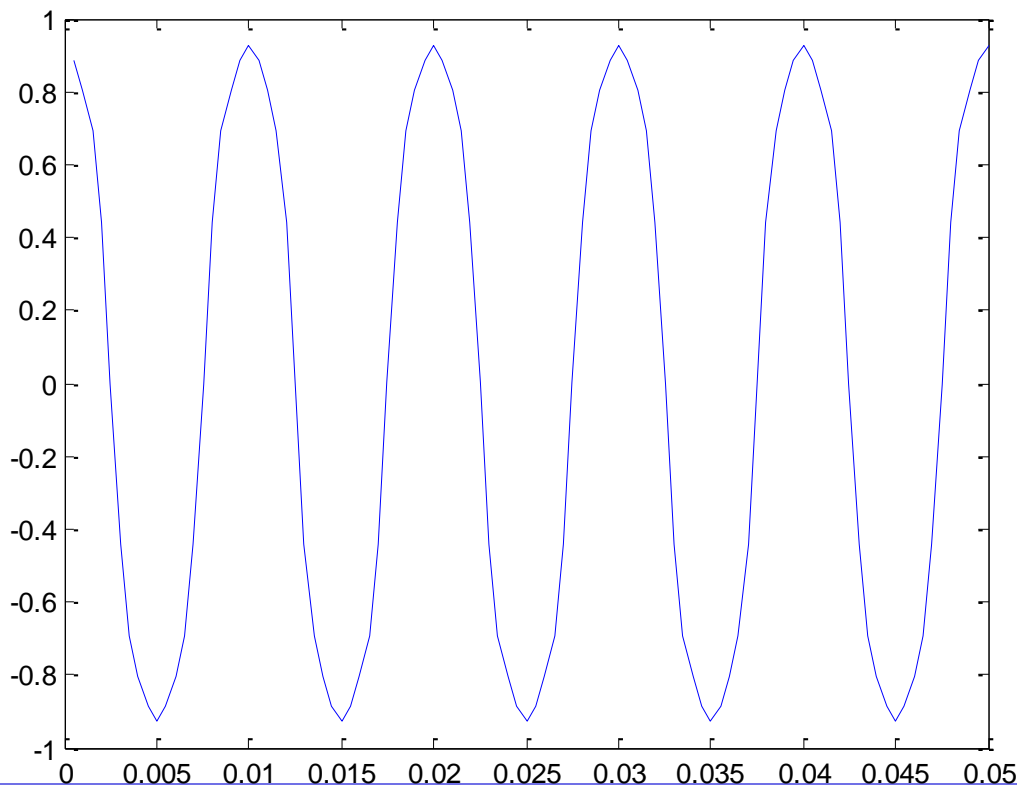


# مثال (بررسی تغییر اندازه و فاز $H(f)$ )

• فرض کنید

$$x(t) = \cos(2\pi * 100 * t) - \frac{1}{9} \cos(2\pi * 300 * t) + \frac{1}{25} \cos(2\pi * 500 * t)$$

در این صورت  $x(t)$  را رسم کنید.

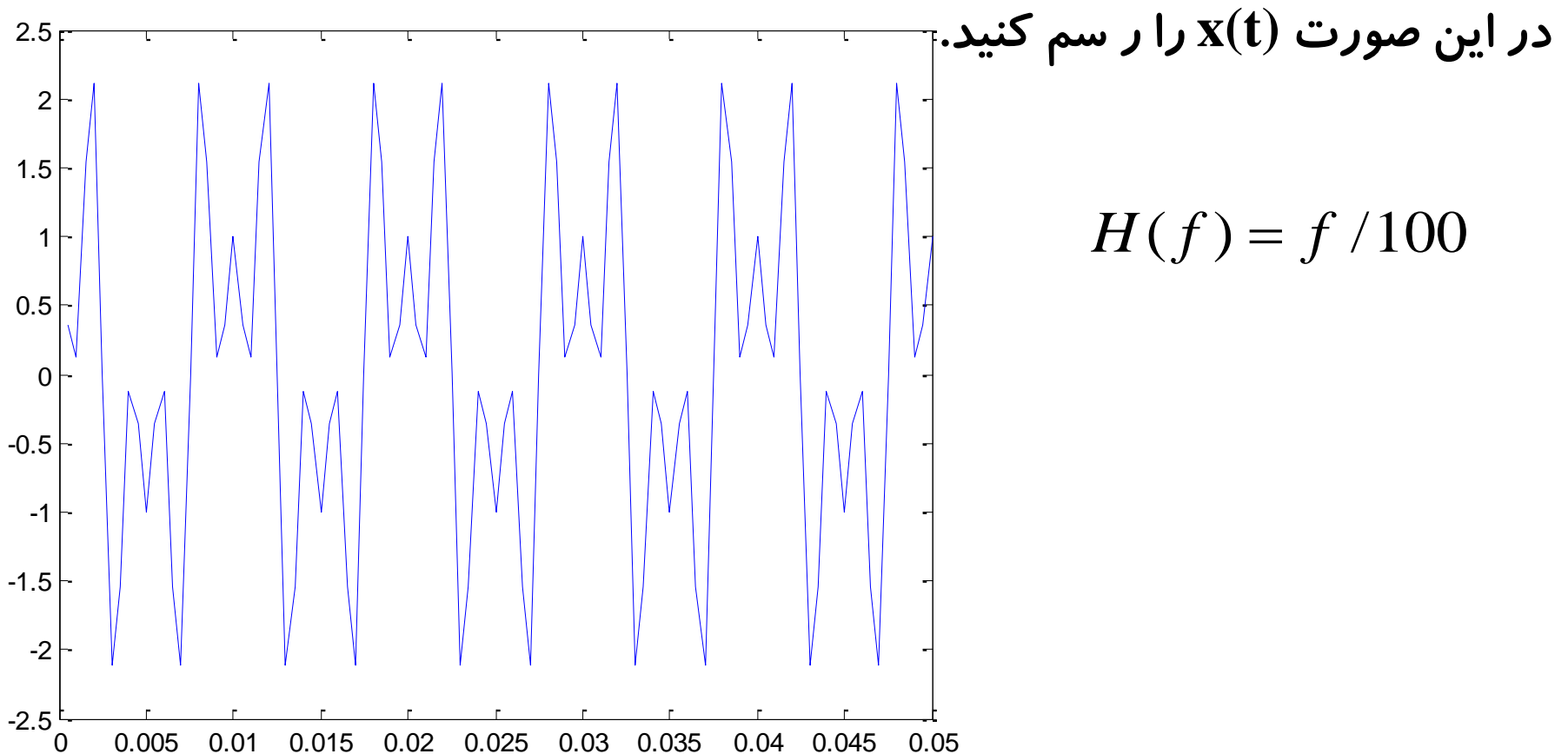


$$H(f) = \frac{1}{f / 100}$$

# مثال (بررسی تغییر اندازه و فاز $H(f)$ )

• فرض کنید

$$x(t) = \sin(2\pi * 100 * t) - \cos(2\pi * 300 * t) + \cos(2\pi * 500 * t)$$

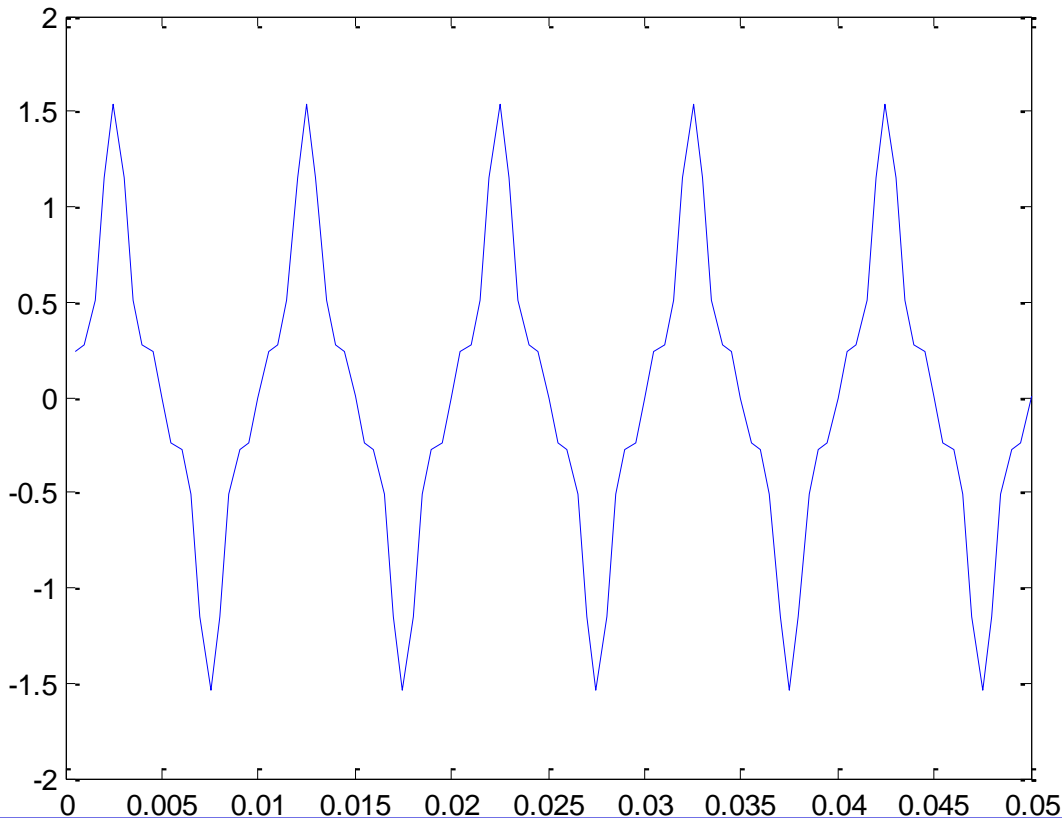


# مثال (بررسی تغییر اندازه و فاز $H(f)$ )

• فرض کنید

$$x(t) = \cos(2\pi * 100 * t + \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{3} \cos(2\pi * 300 * t + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{5} \cos(2\pi * 500 * t + \frac{\pi}{2})$$

در این صورت  $x(t)$  را رسم کنید.



$$H(f) = \begin{cases} e^{j\frac{\pi}{2}} & f > 0 \\ e^{-j\frac{\pi}{2}} & f < 0 \end{cases}$$

# عبور سیگنال از سیستم خاص

- فرض کنید سیستم LTI دارای پاسخ فرکانسی زیر باشد:

$$H(f) = \begin{cases} Ae^{j(-2\pi ft_g + \phi_0)} & f > 0 \\ Ae^{j(-2\pi ft_g + \phi_0)} & f < 0 \end{cases}$$

- اگر  $x(t)$  یک سیگنال میانگذر باشد خروجی سیستم را به دست آورید.
- فرم کلی سیگنال میانگذر

$$x(t) = x_1(t) \cos \omega_c t - x_2(t) \sin \omega_c t$$

- خروجی سیستم

$$y(t) = Ax_1(t - t_g) \cos [\omega_c(t - t_g) + \phi_0] - Ax_2(t - t_g) \sin [\omega_c(t - t_g) + \phi_0]$$

سپاس

